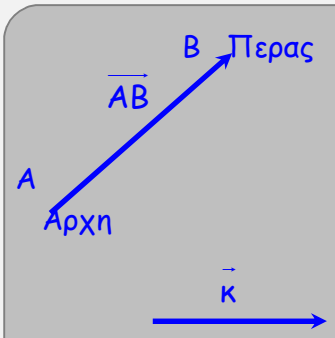
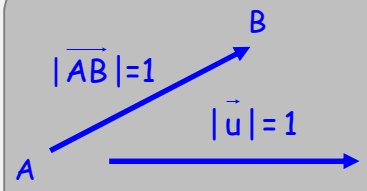
Η Εννοια του διανυσματος

Διανυσμα :
Λεγεται ενα προσανατολισμενο ευθ. τμημα του οποιου τα ακρα θεωρουνται διατεταγμενα .Το πρωτο σημειο λεγεται *αρχη* ή *σημειο εφαρμογης*, ενω το δευτερο λεγεται *περας* του διανυσματος.
Το διανυσμα με αρχη Α και περας Β συμβολιζεται με $\overrightarrow{AB}$ η και με ενα πεζο ελληνικο ή λατινικο γραμμα βαζοντας πανω του ενα βέλος π.χ. το $\vec{\kappa}$

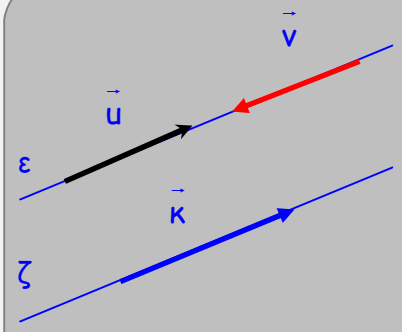


Μηδενικο:
Λεγεται το διανυσμα του οποιου η αρχη και το τελος συμπιπτουν. Συμβολιζεται $\vec{0}$ ή $\overrightarrow{AA}$.

Μετρο διανυσματος $\overrightarrow{AB}$:
Λεγεται το μηκος του ευθ. τμηματος ΑΒ. Συμβολιζεται $|\overrightarrow{AB}|$ και προφανως ειναι $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$. Ισχυει $|\overrightarrow{AA}|=0$
Μοναδιαιο λεγεται το διανυσμα που εχει μετρο την μοναδα.
π.χ.τα $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$

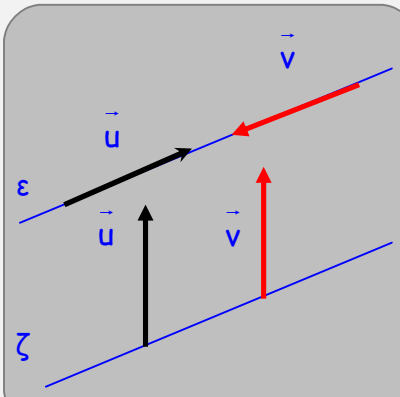


Φορεας διανυσματος:
Ειναι η ευθεια πανω στην οποια βρισκεται το διανυσμα. Η ευθεια ε ειναι φορεας του $\vec{u}$ και $\vec{v}$, η ευθεια ζ ειναι φορεας του $\vec{\kappa}$
Παραλληλα ή συγγραμικα διανυσματα:
Εχουν τον ιδιο φορεα ή παραλληλους φορεις.
Συμβολισμος ' // ' π.χ. $\vec{u} // \vec{v}$ και $\vec{u} // \vec{\kappa}$
Διανυσματα με ιδια διευθυνση:
Λεγονται τα παραλληλα διανυσματα π.χ. τα $\vec{\kappa}$, $\vec{u}$,$\vec{v}$



Ομορροπα διανυσματα
Ειναι τα παραλληλα διανυσματα που αν :
- *εχουν τον ιδιο φορεα*, η μια απ'τις ημιευθειες που οριζουν, περιεχεται στην αλλη.
- *εχουν παραλληλους φορεις*, βρισκονται στο ιδιο ημιεπιπεδο ως προς την ευθεια που περναει απ'τις αρχες τους.

Συμβολισμος '↑↑'
π.χ. $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Η Εννοια του διανυσματος

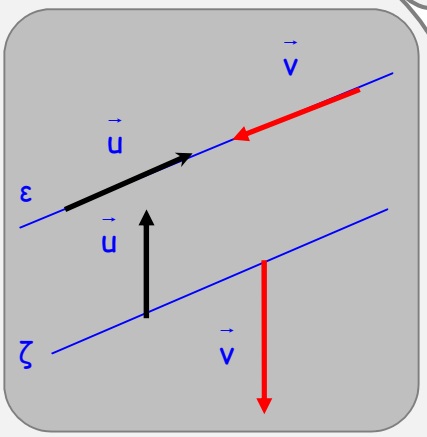
Αντιρροπα διανυσματα

Ειναι τα παραλληλα διανυσματα που αν :

- *εχουν τον ιδιο φορεα*, καμια απ'τις ημιευθειες που οριζουν δεν περιεχεται στην αλλη.
- *εχουν παραλληλους φορεις*, βρισκονται σε διαφορετικα ημιεπιπεδα ως προς την ευθεια που περναει απ'τις αρχες τους.

Συμβολισμος '↑↓'

π.χ. $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$



Ισα διανυσματα

Ειναι δυο ομορροπα διανυσματα που εχουν ισα μετρα.

Δηλαδη: $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$ και $|\vec{u}|=|\vec{v}|$ τοτε $\vec{u}=\vec{v}$ η (σχημα)

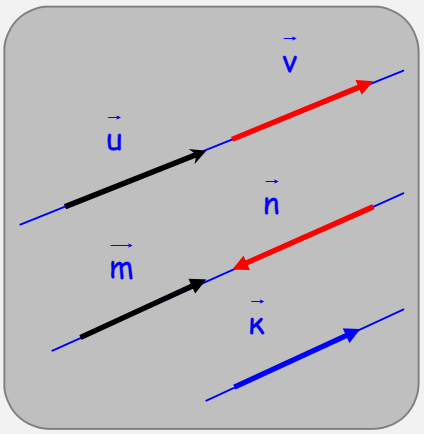
$\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{\kappa}$ και $|\vec{u}|=|\vec{\kappa}|$ τοτε $\vec{u}=\vec{\kappa}$

Αντιθετα διανυσματα

Ειναι δυο αντιρροπα διανυσματα που εχουν ισα μετρα.

Δηλαδη: $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$ και $|\vec{m}|=|\vec{n}|$ τοτε $\vec{m}=-\vec{n}$ η (σχημα)

$\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{\kappa}$ και $|\vec{n}|=|\vec{\kappa}|$ τοτε $\vec{n}=-\vec{\kappa}$



- Για καθε διανυσμα $\overrightarrow{AB}$ ειναι : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- Το μηδενικο διανυσμα εχει οποιαδηποτε κατευθυνση, οποτε ειναι παραλληλο με οποιοδηποτε αλλο διανυσμα.
- Αν M το μεσο του τμηματος AB τοτε : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$
- Αν $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ τοτε : M το μεσο του τμηματος AB

Γωνια δυο διανυσματων $\vec{u}$, $\vec{v}$

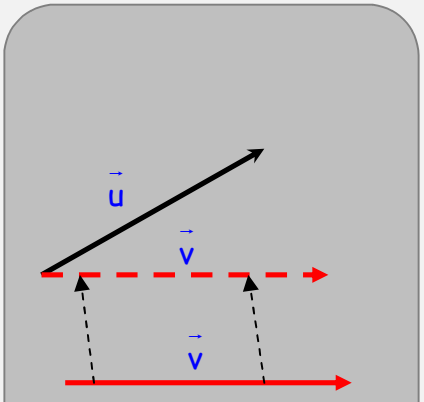
Λεγεται η θετικη και κυρτη γωνια που σχηματιζουν, οταν με παραλληλη μεταφορα αποκτησουν κοινη αρχη.

Συμβολιζουμε με $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ή $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ με $0^0 \le (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ή $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) \le 180^0$

- Τα ομορροπα διανυσματα σχηματιζουν γωνια 0^0

  $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$ τοτε $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0^0$
- Τα αντιροπα διανυσματα σχηματιζουν γωνια 180^0

  $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$ τοτε $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 180^0$
- Στη περιπτωση που $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 90^0$ τα διανυσματα $\vec{u},\vec{v}$ λεγον - ται *καθετα* ή *ορθογωνια* και συμβολιζονται $\vec{u} \perp \vec{v}$.

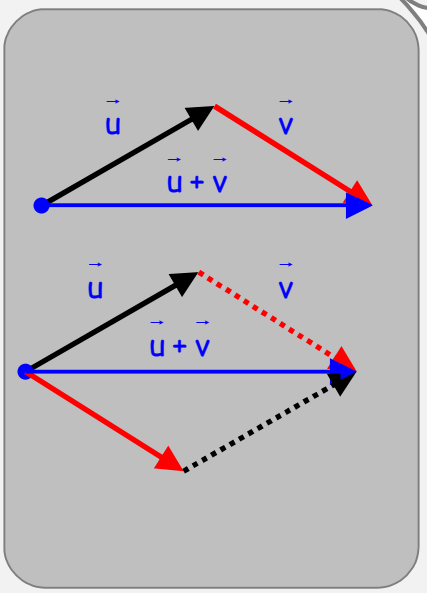


Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Πράξεις διανυσματων

Αθροισμα δυο διανυσματων $\vec{u}$, $\vec{v}$

- Με παραλληλη μεταφορα καθιστουμε τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ διαδοχικα (το περας του πρωτου αρχη του δευτερου).
  Αθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ ειναι το διανυσμα με αρχη, την αρχη του $\vec{u}$ και περας, το περας του $\vec{v}$.
- Με παραλληλη μεταφορα καθιστουμε τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ με κοινη αρχη. Σχηματιζουμε παραλληλογραμμο με διαδοχικες πλευρες τα διανυσματα $\vec{u},\vec{v}$.
  Αθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ ειναι το διανυσμα της διαγωνιου του παραλληλογραμμου με αρχη, την αρχη των $\vec{u},\vec{v}$.



Ιδιοτητες της πρόσθεσης διανυσματων

α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική)

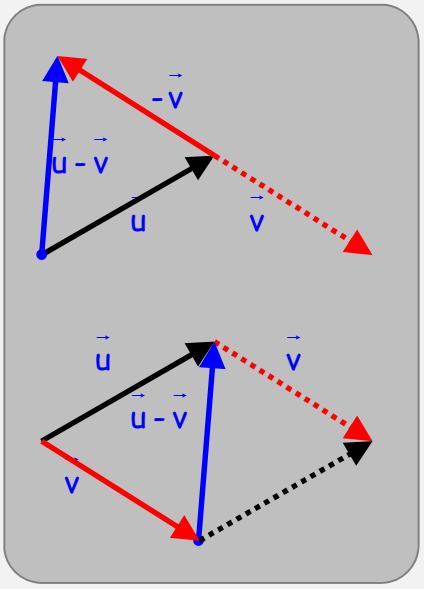
β) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (προσεταιριστική)

γ) $\vec{\alpha}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{\alpha}$ (ουδέτερο στοιχείο)

δ) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha}) = \vec{0}$ (αντίθετο στοιχείο

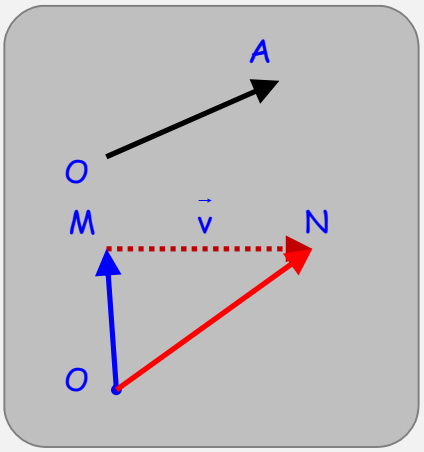
Διαφορα δυο διανυσματων $\vec{u}$, $\vec{v}$

- Η διαφορα του διανυσματος $\vec{v}$ απ'το διανύσμα $\vec{u}$, ειναι το αθροισμα του διανυσματος $\vec{u}$ με το αντιθετο του διανυσματος $\vec{v}$ (το $-\vec{v}$).
  Ειναι $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$
- Με παραλληλη μεταφορα καθιστουμε τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ με κοινη αρχη. Σχηματιζουμε παραλληλογραμμο με διαδοχικες πλευρες τα διανυσματα $\vec{u},\vec{v}$.
  Αθροισμα $\vec{u}-\vec{v}$ ειναι το διανυσμα της διαγωνιου του παραλληλογραμμου με αρχη, το περας του $\vec{v}$.



Διανυσμα θεσης σημειου του επιπεδου

- Ενα σημειο Ο του επιπεδου, που το θεωρουμε ως αρχη, το λεμε *σημειο αναφορας.*
- *Διανυσματικη ακτινα του σημειου Α* (διανυσμα θεσης του σημειου Α) λεμε το διανυσμα $\overrightarrow{OA}$, οπου Ο το σημειο αναφορας.
- Ενα διανυσμα $\overrightarrow{MN}$ ισουται με τη διανυσματικη ακτινα του περατος του μειον τη διανυσματικη ακτινα της αρχης του.
  Δηλαδη ειναι: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ (Ο το σημειο αναφορας).



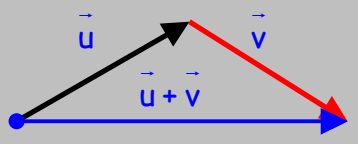
Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Πραξεις διανυσματων

Τριγωνικη ανισοτητα στα διανυσματα

Το μετρο του αθροισματος δυο διανυσματων περιεχεται με - ταξυ του αθροισματος των μετρων τους και της απολυτης τιμης της διαφορας των μετρων τους.

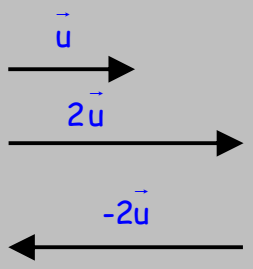
Δηλαδη : $|\,|\vec{u}\,| - |\vec{v}\,|\,| \le |\vec{u}+\vec{v}\,| \le |\vec{u}\,| + |\vec{v}\,|$



Πολλαπλασιασμος αριθμου λ με διανυσμα $\vec{u}$

Γινομενο του αριθμου $\lambda \neq 0$ με το διανυσμα $\vec{u} \neq \vec{0}$ ειναι ενα διανυσμα που συμβολιζεται $\lambda\vec{u}$ η $\lambda \cdot \vec{u}$ και

- αν $\lambda > 0$ τοτε ειναι ομορροπο του $\vec{u}$
- αν $\lambda < 0$ τοτε ειναι αντιρροπο του $\vec{u}$
- αν $\lambda = 0$ η $\vec{u} = \vec{0}$ τοτε ειναι ισο με $\vec{0}$



Ιδοτητες πολλαπλασιασμου αριθμου με διανυσμα

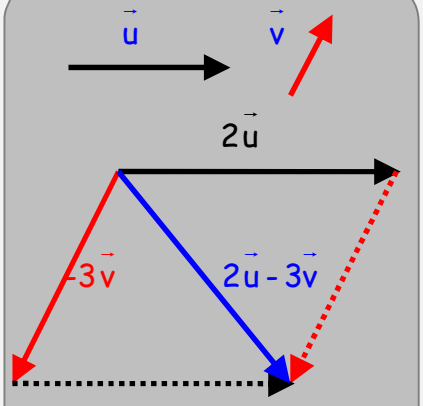
- $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
- $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$
- $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
- $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ η $\vec{u} = \vec{0}$
- $(-\lambda\vec{u}) = \lambda(-\vec{u}) = -(\lambda\vec{u})$
- $\lambda(\vec{u}-\vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$
- $(\lambda-\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{u}$
- $\lambda\vec{u} = \lambda\vec{v}$ και $\lambda \neq 0$ τοτε $\vec{u} = \vec{v}$
- $\lambda\vec{u} = \mu\vec{u}$ και $\vec{u} \neq \vec{0}$ τοτε $\lambda = \mu$

Συνθηκη παραλληλιας δυο διανυσματων $\vec{u}, \vec{v}$

Δυο διανυσματα $\vec{u},\vec{v}$ με $\vec{v} \neq \vec{0}$ ειναι παραλληλα αν και μονο αν υπαρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τετοιος ωστε $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Γραμμικος συνδιασμος διανυσματων

- Γραμμικος συνδιασμος δυο διανυσματων $\vec{u},\vec{v}$ ειναι καθε δια - νυσμα της μορφης $\vec{\kappa} = \mu\vec{u} + \rho\vec{v}$ με $\mu,\rho \in \mathbb{R}$.
- Γραμμικος συνδιασμος των διανυσματων $\vec{u_1},\vec{u_2} \ldots \vec{u_\nu}$ ειναι κα - θε διανυσμα της μορφης $\vec{\kappa} = \lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \ldots + \lambda_\nu\vec{u_\nu}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{R}$.



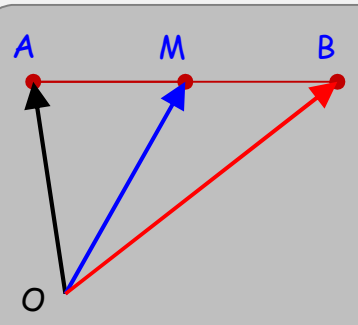
Διανυσματικη ακτινα μεσου (εφαρμογη)

Το σημειο Μ ειναι μεσο του ευθυγραμμου τμηματος ΑΒ αν και μονον αν: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

Α π ο δ ε ι ξ η

Ειναι $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

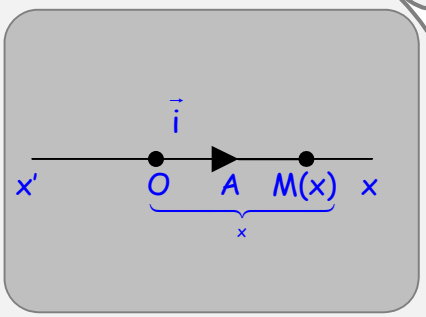


Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Συντεταγμενες στο επιπεδο

Αξονας

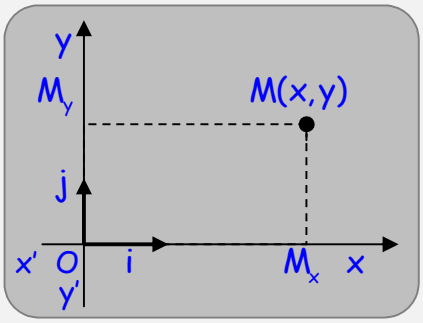
Ειναι μια ευθεια x'x στην οποιαν εχει ορισθει ενα σημειο O για αρχη και ενα μοναδιαιο διανυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ στη διευθυνση της ημιευθειας Ox.
θετικος ημιαξονας ειναι η ημιευθεια Ox, ενω αρνητικος η ημι-ευθεια Ox'.



Για καθε σημειο M του αξονα υπαρχει μοναδικο $x \in \mathbb{R}$, τετοιο ωστε $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.
Αντιστροφα, για καθε $x \in \mathbb{R}$, υπαρχει στον αξονα σημειο M, τετοιο ωστε $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.
Ο x λεγεται *τετμημενη* του σημειου M.

Ορθοκανονικο συστημα συντεταγμενων στο επιπεδο

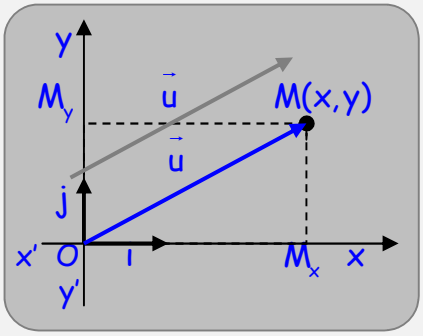
Ειναι δυο καθετοι αξονες x'x, y'y με κοινη αρχη O στους οποιους εχουν οριστει τα μοναδιαια διανυσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$.
Ο x'x ειναι ο αξονας των τετμημενων, ενω ο y'y ο αξονας των τεταγμενων.
Το συστημα των δυο αξονων λεγεται και Καρτεσιανο επιπεδο.



Καθε σημειο M του επιπεδου αντιστοιχιζεται σ'ενα ζευγος (x,y) πραγματικων αριθμων που λεγονται *συντεταγμενες* του σημειου M. Το x ειναι η *τετμημενη* του σημειου M, ενω το y ειναι η *τεταγμενη* του σημειου M. Το σημειο M συμβολιζεται: M(x,y) η (x,y).
Αντιστροφα, καθε ζευγος (x,y) πραγματικων αριθμων αντιστοιχιζεται σ'ενα σημειο M του επιπεδου.

Συντεταγμενες διανυσματος

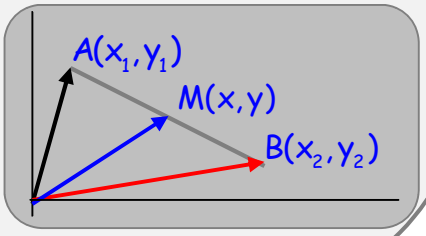
Καθε διανυσμα στο επιπεδο γραφεται με μοναδικο τροπο σαν γραμμικος συνδιασμος των μοναδιαιων διανυσματων $\vec{i}, \vec{j}$.
Δηλαδη $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (Συμβολιζουμε : $\vec{u} = (x,y)$).
Τα διανυσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ αποτελουν τις συνιστωσες του διανυσματος $\vec{u}$.



- Δυο διανυσματα ειναι ισα, αν και μονον αν, οι αντιστοιχες συντεταγμενες τους ειναι ισες. Αν $\vec{u} = (x_1, y_1)$ και $\vec{v} = (x_2, y_2)$ τοτε : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.
- Προσθεση : $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Αφαιρεση : $\vec{u} - \vec{v} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
- Πολλαπλασιασμος με αριθμο : $\lambda\vec{u} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
- Γραμμικος συνδιασμος : $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

Συντεταγμενες μεσου ευθυγραμμου τμηματος

Το ευθυγραμμο τμημα AB με ακρα $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ εχει μεσο M(x,y) με συντεταγμες $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/